Teorema 1

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\theta$

Teorema 2

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

1) $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$
2) $|x+y| \leq |x| + |y|$

Definizione 1

$B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r \}$ (insieme aperto, lo Buccio della pelle di centro x Raggio r non ne appartiene)

Definizione 2

$A \in \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall d \in A \; \exists \, r > 0$ tale che $B(d, r) \subset A$

Definizione 3

Diremo che $A \subset \mathbb{R}^n$ è limitato se $\exists \, R > 0$ tale che $A \subset B(0, R)$

(un insieme è aperto se non contiene lo Buccio
è chiuso se contiene lo Buccio)

(un insieme è limitato se nessun limite va a $\pm\infty$
è illimitato se $\exists$ almeno un limite che va a $\pm\infty$)

Definizione 4

$A \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto
(il complementare di A è chiuso se il complementare di A è aperto)

Definizione 5

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ diremo che $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di frontiera se $\forall \varepsilon > 0 \; B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ e $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

(∂A = Frontiera di A, lo Buccia)

Definizione 6

$A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

1) x è interno (ad A) se $\exists \, r > 0$ t.c. $B(x, r) \subset A$
2) x è un punto isolato di A se $\exists \, \bar{r} > 0$ t.c. $A \cap B(x, \bar{r}) = \{x\}$

3) x è un punto di accumulazione per per A se $\forall \varepsilon > 0$

$$(A \cap B(x,\varepsilon)) \setminus \{x\} \neq 0$$

$\mathring{A}$ insieme dei punti interni di A

$D(A)$ insieme dei punti di accumulazione di A
Derivate

(A è aperto se e solo se tutti i suoi punti sono interni)

(intersezione e/o unione di:
aperti sono aperi chiusi sono chiusi)

Successioni in $\mathbb{R}^n$

Definizione 6

(Le successioni in $\mathbb{R}^n$ sono vettori le cui componenti sono successioni in $\mathbb{R}$)

Definizione 7

Diremo che $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$ è limitato se l'insieme immagine è un insieme limitato

$\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$ è limitato $\iff \exists R > 0$ t.c. $|x_k| \leq R \ \forall k \in \mathbb{N}$

Definizione 8

Dato $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ed $\ell \in \mathbb{R}^n$ diremo che $x_k \to \ell$ o $\lim_{k\to\infty} x_k = \ell$ se $\lim_{k\to\infty} |x_k - \ell| = 0$

Definizione 9

Data $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ una sottosuccessione è data da una funzione $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $\varphi_\ell = x_{\varphi(\ell)}$ $\ell \in \mathbb{N}$

Definizione 10

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ definiamo $\bar{A}$ (chiusura di A) $= \{\ell \in \mathbb{R}^n \mid \{x_k\} \subset A, x_k \to \ell\}$

(La chiusura della palla aperta è la palla chiusa)

(La chiusura trasforma le disuguaglianze strette "$>$, $<$" in disuguaglianze deboli "$\geq$, $\leq$")

Definizione 11

$E \in \mathbb{R}^n$ è compatto se $\forall \{x_k\} \subset E \ \exists \{x_{k_\ell}\}$ tale che
(2) $x_{k_\ell} \to x_0$ e $x_0 \in E$

master COPY COPISTERIA 050/831212 388/9837745

Teorema 3

E è compatto se e solo se è chiuso e limitato

Definizione 12 (Limite)

$A \subset \mathbb{R}^n$ $x_0 \in D(A)$ $f: A \to \mathbb{R}$ $\ell \in \mathbb{R}$

- Diremo che f tende ad ℓ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap B(x_0, \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

- Diremo che $f(x) \to +\infty$ se $\forall M > 0$ $\exists \delta_M > 0$ T.C.

$f(x) > M$ $\forall x \in A \cap B(x_0, \delta_M) \setminus \{x_0\}$

analogamente per $f(x) \to -\infty$

Teorema 4

Se $x_0 \in D(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ allora assumendo che esista limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ è unico}$$

cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

Definizione 13

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Teorema 5

$f, g: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^n$ $x_0 \in D(A)$ $d \in \mathbb{R}$

$f, g \to \ell, L \in \mathbb{R}$ allora abbiamo:

I) $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + L$

II) $\exists \lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \ell \cdot L$

III) $\exists \lim_{x \to x_0} (df)(x) = d\ell$

IV) se $L \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell}{L}$

(Per il caso IV vale il Teorema di permanenza del segno

Teorema 6

se $g: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D(A)$ e $g(x) \to L \neq 0$

allora $\exists \delta_L > 0$ T.C. $|g(x) - L| < \frac{L}{2}$ $\forall x \in B(x_0, \delta_L)$

ovvero

$$\frac{L}{2} < g(x) < \frac{3}{2}L$$

($g(x)$ ha sempre il segno del suo limite)

master COPY COPISTERIA 050/8812126 388/9837745

Definizione 13

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$ e $f: A \to \mathbb{R}$ diremo che f è continua in x_0 se x_0 è isolato oppure se $x_0 \in D(A)$ (punto di accumulazione)

diremo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema 7

siano $f, g: A \to \mathbb{R}$ continue in x_0 allora:

$f+g$, $f \cdot g$, df $(d \in \mathbb{R})$ sono continue

se $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ è continua

Definizione 14

Dati $A \subset \mathbb{R}^n$ $f: A \to \mathbb{R}$ diremo che f è continua se è continua in ogni punto di A

Teorema 8

Siano $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue su A allora $f+g$ $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ continue su A

Teorema 9

$A \subset \mathbb{R}^n$ $g: A \to \mathbb{R}^m$ $g(A) \subset B \subset \mathbb{R}^m$ e $f: B \to \mathbb{R}^n$

se g è continua in $x_0 \in A$ e f continua in $g(x_0) \in B$

$\Rightarrow f \circ g: A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0

Massimi e Minimi

Definizione 15

$f: A \to \mathbb{R}$ massimo e minimo sup e inf su $\mathbb{R}$

$\max f(A)$ $\max_A f$ $\sup f(A) = \sup_A f$

Teorema 10 (Weierstrass)

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è compatto e f è continua $f: A \to \mathbb{R}$ allora esistono $\max_A f$ e $\min_A f$

Definizione 16

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ non limitato

$\ell \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon > 0$ t.c.

$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ e $|x| > M_\varepsilon$

ono analogamente per $\ell = \pm\infty$

Teorema 11

sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

1) se $\lim_{x\to\infty} f = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^n} f = +\infty$ $\quad \exists \max_{\mathbb{R}^n} f$

2) analogamente $(-\infty)$

3) $f(x_0) = \ell \in \mathbb{R}^{**}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \exists \min_{\mathbb{R}^n} f$ $\exists \max_{\mathbb{R}^n} f$

CALCOLO DIFFERENZIALE

Definizione 17

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ Diremo che f ha max (o min) locale se esiste $r>0$ t.c. $B(x_0, r) \subset A$ e $\max_{B(x_0,r)} f(x_0)$

se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ha tutte le derivate parziali i-esime in x_0 e x_0 è un punto di max o min locale allora

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

DIFFERENZIABILITA'

Definizione 18

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare $\iff$ esiste $a \in \mathbb{R}^n$ t.c. $L(v) = \langle a, v \rangle$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definizione 19

spazio duale di $\mathbb{R}^n$ $\quad (\mathbb{R}^n)^* = \{ L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, L \text{ lineare} \}$

$L, T \in (\mathbb{R}^n)^* \Rightarrow \alpha L + \mu T \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\quad \alpha, \mu \in \mathbb{R}$

($(\mathbb{R}^n)^*$ è uno spazio vettoriale di dimensione n)

Definizione 20

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ diremo che f è differenziabile in x_0 se $\exists\ L \in (\mathbb{R}^n)^*$ tale che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

questo L è unico e si denota così:

$L = df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il differenziale di f in x_0

master copy COPISTERIA 050/8612126 3881983745